Sürekli Kesirler


Emre Güngör / emregungor.48@gmail.com
Ülgen Kılıç / ulgenklc@gmail.com

1. Giriş

Sürekli kesirler ilk olarak 1653 yılında John Wallis'in *Arithmatica Infinitorum* kitabında tanımlanmıştır. Esasen, Wallis'ten daha önce ifade olarak tanımlanmasa da sürekli kesir formunu kullanan matematikçiler vardı. Bunun ilk örneği, milattan önce 300'lü yıllarda yaşamış Öklid'in, *Elementler* kitabında yer alan iki sayının en büyük ortak bölenini bulmaya yarayan Öklid Algoritması'ndaki kullanılışıdır. Daha sonralarda, 6. yüzyılda yaşamış Hint matematikçi Aryabhata tarafından lineer denklemleri çözmek için kullanılmıştır. 1700'lü yıllara geldiğimizde büyük matematikçilerin de sürekli kesirlerle ilgilendiğini görüyoruz. Leonard Euler, Euler kuralı olarak bilinen hesaplamayı geliştirmiştir; Lagrange, kendi ismi ile anılan teoremi kanıtlamış ve Pell denklemi için sürekli kesirleri kullanarak genel bir çözüm sunmuştur.

Sürekli kesirlerin, lise müfredatında anlatılandan çok daha uzun ve derin bir tarihi var. Halen pek çok araştırmaya konu veya yardımcı olan bir alan. Bu yazıda ise, sürekli kesirlerin Öklid'den itibaren aşama aşama nasıl geliştiğini, nerede ve nasıl ihtiyaç haline geldiğini anlamaya çalışacağız.

2. Tanımlar ve bazı özellikler

İki doğal sayının en büyük ortak bölenini bulmak için kullandığımız Öklid algoritmasını hatırlayalım. Yapacağımız şey bu algoritmayı yeni bir yolla tasvir etmek. Öklid algoritmasını 77 ve 18 sayılarına uygulayalım:

$$\begin{aligned} 77 &= 4 \times 18 + 5 \\ 18 &= 3 \times 5 + 3 \\ 5 &= 1 \times 3 + 2 \\ 3 &= 1 \times 2 + 1. \end{aligned}$$

Her eşitliği kesir formunda yazalım:

$$\frac{77}{18} = 4 + \frac{5}{18}$$
$$\frac{18}{5} = 3 + \frac{3}{5}$$
$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$
$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Bu eşitliklerdeki son kesirli formun, bir sonraki eşitliğin ilk kesirli formunun çarpmaya göre tersine eşit olduğuna dikkat edelim. Böylece $\frac{77}{18}$ kesrini şu formda ifade edebiliriz:

$$\frac{77}{18} = 4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Şimdi tanımımızı verebiliriz.

Tanım 1. *Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki gösterime **sürekli kesir** denir.*
Burada 4, 3, 1, 1 ve 2 ifadelerine ***terim*** veya ***kısmi bölüm***; $\frac{77}{18}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{5}{3}$ ve $\frac{3}{2}$ ifadelerine ise sürekli kesrin ***tam bölümü*** denir. Kolaylık olması amacıyla üstteki ifadeyi, şu formda yazacağız:

$$\frac{77}{18} = 4 + \frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}.$$

Yukarıda gördüğümüz üzere, her $\dfrac{a}{b}$ rasyonel sayısı, a ve b aralarında asalken, Öklid algoritması kullanılarak sürekli kesir formunda gösterilebilir ve bu gösterimin tek olduğunu kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

Genel haldeki sürekli kesrimizi şu formda yazalım;

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\cdots\frac{1}{q_n}. \tag{1}$$

Bu genel formdaki sürekli kesrin üzerinde parçalar halinde çalışmaya başlayalım. Yapacağımız şey çok basit. Paydaları eşitleyerek sürekli kesri tek bir bölüm halinde yazmaya çalışacağız.

$n = 1$ iken elimizde;
$q_0 + \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$ kesri var.

$n = 2$ iken elimizde;
$q_0 + \dfrac{1}{q_1+}\dfrac{1}{q_2} = q_0 + \dfrac{q_2}{q_1 q_2 + 1} = \dfrac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1}$
kesri var.

$n = 3$ içinse;

$$\begin{aligned} q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3} &= q_0 + \frac{q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3} \\ &= \frac{q_0 q_1 q_2 q_3 + q_0 q_1 + q_0 q_3 + q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}. \end{aligned} \tag{2}$$

kesri var. Genel modeli payda eşitleyerek inşa edebiliyoruz. Şimdi bir gösterim belirleyelim. (1)'deki genel sürekli kesrin payını bundan sonra

$$[q_0, q_1, \cdots, q_n]$$

şeklinde göstereceğiz. Aynı şekilde $n = 1, 2, 3$ için bulduğumuz bölümlerin paylarını notasyonun tutarlı olması için;

$$[q_0] = q_0,\ [q_0, q_1] = q_0q_1 + 1,$$
$$[q_0, q_1, q_2] = q_0q_1q_2 + q_0 + q_2,$$
$$[q_0, q_1, q_2, q_3] = q_0q_1q_2q_3 + q_0q_1 + q_0q_3 + q_2q_3 + 1$$

biçiminde yazmamız gerekir.

Aynı şekilde düşünmeye devam edersek (1)'deki genel sürekli kesrin paydasını da;

$$[q_1, q_2, \ldots, q_n]$$

biçiminde yazarız. O zaman genel sürekli kesir için gösterimimiz;

$$q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\cdots\frac{1}{q_n} = \frac{[q_0, q_1, \ldots, q_n]}{[q_1, q_2, \ldots, q_n]}$$

oldu.

Şimdi $n = 3$ için yaptığımız (2)'deki hesaplamaya geri dönelim.

$$\begin{aligned}[q_0, q_1, q_2, q_3] = & \\ &= q_0q_1q_2q_3 + q_0q_1 \\ &+ q_0q_3 + q_2q_3 + 1 \\ &= q_0(q_1q_2q_3 + q_1 + q_3) \\ &+ (q_2q_3 + 1).\end{aligned} \tag{3}$$

İkinci toplamı yukarıdaki notasyonu kullanarak;

$$q_2q_3 + 1 = [q_2, q_3].$$

şeklinde yazalım. İlk toplamı da aynı şekilde;

$$(q_1q_2q_3 + q_1 + q_3) = [q_1, q_2, q_3].$$

şeklinde yazalım. O zaman;

$$[q_0, q_1, q_2, q_3] = q_0[q_1, q_2, q_3] + [q_2, q_3].$$

olur. Bu kural açık bir şekilde genellenebilir. Genel sürekli kesirler için bir kural bulmuş olduk:

$$\begin{aligned}[q_0, q_1, \ldots, q_n] = & \\ &= q_0[q_1, q_2, \ldots, q_n] + [q_2, q_3, \ldots, q_n].\end{aligned} \tag{4}$$

Bulduğumuz formül kare parantez fonksiyonunu tanımlayan bir tekrar bağıntısıdır.

Şu ana kadar genel formdaki sürekli kesirlerin şu formda yazılabileceğini gördük:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\cdots\frac{1}{q_n} = \frac{[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n]}{[q_1, q_2, \ldots, q_n]}.$$

Peki kare parantez fonksiyonunu ifade eden sistematik bir kural bulabilir miyiz? Yani verilen her n doğal sayısı için, kare parantez fonksiyonunu (3)'teki gibi yazabilir miyiz? Bulmamıza gerek yok! Çünkü bulunmuşu var! ***Euler kuralı*** tam da bu amaç için var:

1. Tüm q_0, q_1, $\ldots$, q_n terimlerini çarpalım.

2. Ardışık iki terimi yok sayarak kalan terimleri çarpalım ve bunu her ardışık iki terim için yapalım; örneğin, q_0 ve q_1 'i yok sayalım ve kalan terimleri çarpalım, q_1 ve q_2'yi yoksayalım ve kalan terimleri çarpalım ve bir önceki adımda bulduğumuz çarpımla toplayalım.

3. Aynı işlemi iki ayrı ardışık terimi yok sayacak şekilde tekrarlayalım. Örneğin, q_0, q_1 ve q_2, q_3 terimlerini yok sayalım ve kalan terimleri çarpalım; sonra q_0, q_1 ve q_3, q_4 terimlerini yok sayalım ve kalan terimleri çarpalım. Bu işlemi bu tanıma uygun tüm dörtlüler için tekrarlayalım. Önceki adımdaki toplamla toplayalım.

Uyarı: q_0, q_1 ve q_1, q_2 ikililerini aynı anda yok sayamayız, çünkü kural ihmal edilen ikililerin ortak terime sahip olmamasını söylüyor.

4. Aynı işlemi üç ayrı ardışık ikili için tekrarlayalım. Hiç terim kalmayıncaya kadar bu işleme devam edelim. Bulduğumuz tüm terimleri birbirine ekleyelim. Eğer n tekse, o zaman $[q_0, q_1, q_2 \cdots q_n]$ gösteriminin son terimi 1'dir.

Örneğin $n = 5$ için;

1. adım: $q_0q_1q_2q_3q_4q_5$. Her şeyi çarptık.

2. adım: $q_2q_3q_4q_5 + q_0q_3q_4q_5 + q_0q_1q_4q_5 + q_0q_1q_2q_5 + q_0q_1q_2q_3$. Önce q_0q_1'i yoksaydık, kalanları çarptık. Daha sonra q_1q_2'yi yok saydık kalanları çarptık, bir önceki çarpımla topladık. q_2q_3'ü yok saydık kalanları çarptık, bir önceki toplama ekledik. q_3q_4'ü yok saydık kalanları çarptık, bir önceki toplama ekledik. En son q_4q_5'i yok sayana kadar aradaki bütün ardışık ikili terimleri yok saydık, kalan her şeyi çarptık, önceki toplama ekledik.

3. adım: $q_4q_5 + q_2q_5 + q_2q_3 + q_0q_5 + q_0q_3 + q_0q_1$. Önce q_0q_1 ve q_2q_3'ü yok saydık, kalan her şeyi çarptık. Sonra q_0q_1 ve q_3q_4'ü yok saydık, kalanları çarptık, önceki toplama ekledik. Sonra q_0q_1 ve $+q_4q_5$'i yok saydık, kalan her şeyi çarptık, önceki toplama ekledik. Daha sonra q_1q_2 ve q_3q_4'ü yok saydık, kalan her şeyi çarptık, önceki toplamla topladık. Daha da sonra q_1q_2 ve q_4q_5'i yok saydık, kalan her şeyi çarptık, önceki toplamla topladık. Son olarak q_2q_3 ve q_4q_5'i yok saydık, kalan her şeyi çarptık, önceki toplama ekledik.

4. adım: 1. q_0q_1, q_2q_3 ve q_4q_5'i yok saydık. Geriye hiçbir şey kalmadı. Biz de 1 ekledik. Bu 4 adımda bulduğumuz her şeyi toplayınca kare parantez fonksiyonunun $n = 5$ olduğunda nasıl bir toplama eşit olduğunu görürüz:

$$[q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5] = q_0q_1q_2q_3q_4q_5 + q_2q_3q_4q_5 +$$

$$q_0q_3q_4q_5 + q_0q_1q_4q_5 + q_0q_1q_2q_5 + q_0q_1q_2q_3 + q_4q_5 + q_2q_5 + q_2q_3 + q_0q_5 + q_0q_3 + q_0q_1 + 1$$

Biraz uzun ve zor oldu! Matematikte ne kolay ki!

Euler kuralının hemen göze çarpan sonuçlarından biri $[q_0, q_1, q_2 \cdots q_n]$ ifadesinin değerinin terimleri ters sırayla yazsak dahi değişmemesidir. Okur, Euler kuralını kullanarak bunun kanıtını kolayca yapabilir:

Önsav 1: $[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n] = [q_n, q_{n-1}, \ldots, q_0]$.

(4)'teki eşitliği ve bu önsavı birlikte düşünürsek şu sonuca ulaşırız;

$$[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n] = q_n[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}] + [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-2}].$$

Sürekli kesrin başına terim eklemektense sonuna eklemek işimize geldiği için (4)'teki eşitlikten daha kullanışlı.

Tanımlarımıza devam ediyoruz.

$$q_0,\ q_0 + \frac{1}{q_1},\ q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2}, \ldots$$

formundaki ifadelere sürekli kesrin ***yakınsakları*** diyeceğiz. Eğer herhangi bir terimde durursak, diyelim q_m'de durduk, genel yakınsağı elde ederiz:

$$\begin{aligned} q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\cdots\frac{1}{q_m} &= \frac{[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m]}{[q_1, q_2, \ldots, q_m]} \\ &= \frac{A_m}{B_m}. \end{aligned}$$

Burada, $\frac{A_0}{B_0} = \frac{q_0}{1}$ ifadesine ***ilk yakınsak***; $\frac{A_n}{B_n} = \frac{a}{b}$ ifadesine de ***son yakınsak*** denir. Tekrar bağıntımız şu formu aldı:

$$A_m = q_mA_{m-1} + A_{m-2} \qquad (5)$$
$$B_m = q_mB_{m-1} + B_{m-2}. \qquad (6)$$

Şimdi, herhangi iki yakınsağın arasındaki ilişkiyi gösteren ve bol bol kullanacağımız bir teoremi kanıtlayalım:

Teorem 1. Herhangi iki ardışık yakınsak, $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ ve $\frac{A_m}{B_m}$, şu ilişkiyi sağlar:

$$A_mB_{m-1} - A_{m-1}B_m = (-1)^{m-1}. \qquad (7)$$

Kanıt. m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için $\frac{A_0}{B_0} = \frac{q_0}{1}$ ve $\frac{A_1}{B_1} = \frac{q_0q_1+1}{q_1}$ olduğundan

$$A_1B_0 - A_0B_1 = (q_0q_1 + 1).1 + q_1q_0 = 1.$$

olur. Eşitliğin $m = k$ için doğru olduğunu varsayalım.

$$A_kB_{k-1} - A_{k-1}B_k = (-1)^{k-1}.$$

Eşitliğin $m = k + 1$ için de doğru olduğunu göstermeye çalışacağız. Yani

$$A_{k+1}B_k - A_kB_{k+1} = (-1)^k$$

olduğunu göstereceğiz. Önce bir gözlem yapalım. (5) ve (6) eşitliklerinde q_m'yi yalnız bırakıp $m = m + 1$ alırsak,

$$\frac{A_{m+1} - A_{m-1}}{A_m} = \frac{B_{m+1} - B_{m-1}}{B_m}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada içler-dışlar çarpımı yapıp ifadeyle biraz oynarsak

$$A_mB_{m+1} - A_{m+1}B_m = A_mB_{m-1} - A_{m-1}B_m$$

olur. Dolayısıyla $m = k$ için,

$$A_kB_{k+1} - A_{k+1}B_k = A_kB_{k-1} - A_{k-1}B_k = (-1)^{k-1}$$

olur. Son eşitliğin tümevarım varsayımımız olduğunu hatırlayalım. O zaman,

$$\begin{aligned} (-1)[A_kB_{k+1} - A_{k+1}B_k] &= \\ = A_{k+1}B_k - A_kB_{k+1} &= (-1)^k. \end{aligned}$$

□

Bu tekrar bağıntısının üç basit sonucunu inceleyelim:

Sonuç 1: A_m ve B_m her zaman aralarında asaldır.

Kanıt. Diyelim A_m ve B_m aralarında asal değiller. O zaman öyle bir $p \neq 0$ doğal sayısı vardır ki $p|A_m$ ve $p|B_m$ olur. Ancak hem A_mB_{m-1} hem de $A_{m-1}B_m$ ifadelerini bölen bir sayı varsa, (7) eşitliğine göre bu sayı $(-1)^{m-1}$'i de bölmek zorunda. O zaman $p = 1$, dolayısıyla A_m ve B_m aralarında asal. □

Sonuç 2: Yakınsaklar, son değer olan $\frac{a}{b}$'den sırayla büyük veya küçüktür. Yani, $\frac{A_m}{B_m} < \frac{a}{b}$ ise $\frac{A_{m+1}}{B_{m+1}} > \frac{a}{b}$ olur.

Kanıt. Yine aynı şekilde $A_mB_{m-1} - A_{m-1}B_m = (-1)^{m-1}$ eşitliği bize yanıtı verir. Eşitliği şu şekilde yazalım;

$$\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{B_mB_{m-1}} \qquad (8)$$

Burada sol taraf, m tek sayı iken pozitif, m çift sayı iken negatiftir. Dahası yakınsakların paydaları $B_0, B_1, \ldots, B_n$ düzgün arttığı için (ileride kanıtlayacağımız üzere) (8) eşitliğindeki fark, m arttıkça azalır. Bu yüzden $\frac{A_1}{B_1} > \frac{A_0}{B_0}$ iken, $\frac{A_2}{B_2} < \frac{A_1}{B_1}$ olur. $\frac{A_m}{B_m}$ gittikçe $\frac{a}{b}$'ye yakınsayacağı için $\frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2}$ olur. Dolayısıyla bütün çift m sayıları için yakınsaklar $\frac{a}{b}$'den küçük, bütün tek m sayıları içinse yakınsaklar $\frac{a}{b}$'den büyüktür. □

Sonuç 3: Her yakınsak, bir önceki yakınsağa göre $\frac{a}{b}$ son değerine daha yakındır.

Kanıt. Diyelim m çift olsun. O zaman $\frac{A_m}{B_m} < \frac{a}{b}$ olur. 2. sonuca göre;

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \ldots < \frac{A_{2m}}{B_{2m}} < \ldots \\ \ldots < \frac{A_n}{B_n} = \frac{a}{b} < \ldots \\ \ldots < \frac{A_{2m+1}}{B_{2m+1}} < \ldots < \frac{A_3}{B_3} < \frac{A_1}{B_1}. \end{aligned}$$

ifadeleri doğru olmak zorunda. $\frac{A_m}{B_m}$'ler $\frac{a}{b}$'ye yakınsadığı için;

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{A_m}{B_m}\right| < \left|\frac{a}{b} - \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}\right|$$

olur. □

Sürekli kesirlerin ne tip ifadeler olduğunu artık biliyoruz. Peki, sürekli kesirleri kullanarak ne gibi problemleri çözebiliyoruz?

Önsav 2: Eğer a ve b aralarında asal iki doğal sayıysa, o zaman $ax - by = 1$ denklemini sağlayan x ve y tamsayıları vardır. Bunları sürekli kesirleri kullanarak bulabiliriz.

Kanıt. $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\cdots\frac{1}{q_n}$.

olsun. $A_mB_{m-1} - A_{m-1}B_m = (-1)^{m-1}$ eşitliğinde $m = n$ alırsak, o zaman:

$$A_nB_{n-1} - B_nA_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

olur. Son yakınsağın $\frac{A_n}{B_n} = \frac{a}{b}$ olduğunu göz önünde bulundurarak

$$aB_{n-1} - bA_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

O zaman *tek* n'ler için $x = B_{n-1}$ ve $y = A_{n-1}$ alalım. *Çift* n'ler için de $x = b - B_{n-1}$ ve $y = a - A_{n-1}$ alalım. Dolayısıyla her n doğal sayısı için bir çözümümüz var! □

Bu inşayı kullanarak, $ax - by = 1$ denklemini sağlayan en az bir tane x_0 ve y_0 değeri bulabiliyoruz. Eğer (x_0, y_0) çiftini özel çözüm olarak alırsak, o zaman genel çözüm de her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} x &= x_0 + bt \\ y &= y_0 + at \end{aligned}$$

olur.

3. Sonsuz sürekli kesirler

Şimdiye kadar sadece rasyonel sayıların sürekli kesire açılımlarını ele aldık. Elbette irrasyonel sayılar da sürekli kesirler şeklinde ifade edilebilir. Ancak tek bir farkla: açılım sonsuza kadar gider!

α bir irrasyonel sayı ve q_0 da α irrasyonel sayısından küçük en büyük tamsayı olsun. O zaman,

$$\alpha = q_0 + \beta$$

olur. Burada β, α'nın kesirli kısmıdır ve $0 < \beta < 1$ eşitsizliği geçerlidir. $\beta = \frac{1}{\alpha_1}$ olarak alırsak şunu elde ederiz:

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Burada $\alpha_1 > 1$ ve $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Bütün α_i'ler için, bir q_i ve bir α_{i+1} bulabiliyoruz, o zaman;

$$\begin{aligned} \alpha &= q_0 + \frac{1}{\alpha_1} & \alpha_1 > 1 \\ \alpha_1 &= q_1 + \frac{1}{\alpha_2} & \alpha_2 > 1 \\ &\vdots \\ \alpha_n &= q_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} & \alpha_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Tüm sonuçları bileştirirsek şunu görürüz:

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\cdots\frac{1}{q_n+}\frac{1}{\alpha_{n+1}},\ q_0 \in \mathbb{Z}, q_{i>0} \in \mathbb{N}.$$

α_i'ler irrasyonel olduğu için bu uygulama hiçbir zaman bitmez. Dolayısıyla elimizde şu eşitlik var:

$$\alpha = \frac{[q_0, q_1, q_2 \ldots, q_n, \alpha_{n+1}]}{[q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_{n+1}]}.$$

Ve (4)'ü kullanarak;

$$\begin{aligned} [q_0, q_1, \ldots, q_n, \alpha_{n+1}] &= \alpha_{n+1}A_n + A_{n-1} \\ [q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_{n+1}] &= \alpha_{n+1}B_n + B_{n-1} \end{aligned}$$

olduğunu buluruz.

Sonsuz sürekli kesirlerin yakınsakları, sonlu sürekli kesirlerinkiyle aynıdır:

$\frac{A_0}{B_0}$ ilk yakınsak,

$\frac{A_n}{B_n}$ son yakınsaktır.

$\frac{A_i}{B_i}$ ise i'inci yakınsaktır.

O zaman, sonsuz sürekli kesirler için genel terim de, sonlu sürekli kesirlerin genel terimiyle aynıdır:

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}A_n + A_{n-1}}{\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1}}.$$

Bu iki eşitlik, bize α'nın yaklaşık değerini verir:

$$\begin{aligned}\alpha - \frac{A_n}{B_n} &= \frac{\alpha_{n+1}A_n + A_{n-1}}{\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n}\\ &= \frac{A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n}{B_n(\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1})}.\end{aligned}$$

$A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n = (-1)^{n-1}$ olduğunu biliyoruz. O zaman;

$$\alpha - \frac{A_n}{B_n} = \frac{\pm 1}{B_n(\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1})}.$$

q_{n+1} terimi α_{n+1}'den küçük en büyük tamsayı olduğundan, $\alpha_{n+1} > q_{n+1}$ olur. Yani,

$$\left|\alpha - \frac{A_n}{B_n}\right| < \frac{1}{B_n B_{n+1}}.$$

Önsav 3: $B_0, B_1, \ldots, B_n$ artan bir dizidir, yani her $n \geq 2$ için, $B_n > B_{n-1}$ olur.

Kanıt. $B_0 = 1$ olduğunu biliyoruz ve $B_1 > B_0$ eşitsizliği bariz. Şunu gözlemleyelim, her $k \geq 2$ için $\alpha_k \geq 1$ ve $k \geq 1$ için $B_{k-1} > 0$ olur. Dolayısıyla,

$$B_k = \alpha_k B_{k-1} + B_{k-2} > B_{k-1}$$

olur. □

$B_0, B_1, \ldots, B_n$ sayıları sürekli artan ise, $\frac{A_n}{B_n}$'nin limitinin, n sonsuza giderken, α olması lazım. Başka bir gösterimle,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \alpha.$$

Bu özellik $\frac{A_n}{B_n}$ ifadesine neden yakınsak dediğimizi de açıklıyor.

4. Periyodik sürekli kesirler

Her irrasyonel sayının sürekli kesir şeklinde gösterilebildiğini biliyoruz.

Tanım 2. Tam kare olmayan her N doğal sayısının kareköküne, $x^2 - N = 0$ denkleminin bir çözümü olduğu için, **ikinci dereceden irrasyonel** denir. Örneğin,

- $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$
- $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots$

Bu eşitlikleri, bar işareti periyodu temsil edecek şekilde $\sqrt{3} = 1,\overline{12}$ formunda yazabiliriz. Artık tamamen periyodik sürekli kesirlerin örneklerini verebiliriz.

Tanım 3. *Eğer bir sürekli kesir ilk teriminden, yani tam kısmından itibaren periyodik ise bu sürekli kesre* ***tamamen periyodik*** *denir.*

- $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$ ifadesi tamamen periyodik değildir.
- $\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$ ifadesi tamamen periyodiktir.

Aslında, herhangi bir ikinci dereceden irrasyonel sayıya tam kısmını ekleyerek tamamen periyodik sürekli kesir elde edebiliriz. Genel olarak, $\sqrt{N} + q_0$ ifadesi tamamen periyodiktir.

Şu tamamen periyodik sürekli kesri inceleyelim,

$$\alpha = 4 + \frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\cdots.$$

Bu sürekli kesri şu şekilde yazabiliriz:

$$\alpha = 4 + \frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{\alpha}$$

Elbette bu durumda $\alpha_n = \alpha_{n+1}$.

$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}A_n + A_{n-1}}{\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1}}$ denkleminden, $\frac{A_2}{B_2} = \frac{19}{4}$ ve $\frac{A_1}{B_1} = \frac{5}{1}$, $\frac{1}{\alpha}$ teriminden önce gelen iki yakınsak olduğundan $\alpha = \frac{19\alpha + 5}{4\alpha + 1}$ olduğunu görürüz.

Dolayısıyla α şu denklemi sağlar:

$$4\alpha^2 - 18\alpha - 5 = 0. \tag{9}$$

Şimdi ise β'yı, α ile aynı, fakat periyodu ters olacak şekilde tanımlayalım:

$$\beta = 3 + \frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots$$

Yani,

$$\beta = 3 + \frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{\beta}$$

olur.

$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}A_n + A_{n-1}}{\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1}}$ denkleminde, yakınsaklar $\frac{A_2}{B_2} = \frac{19}{5}$ ve $\frac{A_1}{B_1} = \frac{4}{1}$ olacak şekilde $\beta = \frac{19\beta + 4}{5\beta + 1}$ denklemini elde ederiz. Dolayısıyla β şu denklemi sağlar:

$$5\beta^2 - 18\beta - 4 = 0 \tag{10}$$

Eğer denklem (9)'da $\alpha = -\frac{1}{\beta}$ olarak alırsak, denklem (10)'u elde ederiz.

O zaman $-\frac{1}{\beta}$, ikinci dereceden denklem (9)'un bir kökü olur. α'nın kendisi olamaz, çünkü $\alpha > 0$,

$\beta > 0$ ve $-\frac{1}{\beta} < 0$ eşitsizlikleri geçerli. Dolayısıyla $-\frac{1}{\beta}$ denklem (9)'un ikinci köküdür ve ***α'nın eşleniği*** olarak adlandırılır, α' şeklinde gösterilir ve $-1 < \alpha' < 0$ olur.

Önerme 1. *Her tamamen periyodik sürekli kesir, 1'den büyük olan ve eşleniği -1 ve 0 arasında olan ikinci dereceden bir irrasyoneli temsil eder. Bu eşlenik $-\frac{1}{\beta}$'dır; β, α'nın periyodu ters çevrilmiş hali olarak tanımlanır.*

1828'de Galois'nın kanıtladığı, ama Lagrange'ın ilk çalışmalarında üstü kapalı bir şekilde bahsettiği üzere, yukarıdaki koşulu sağlayan her ikinci dereceden irrasyonelin, tamamen periyodik sürekli kesir gösterimi vardır.

Tanım 4. *Eğer $\alpha > 1$ ve $-1 < \alpha' < 0$ ise α'ya* ***indirgenmiş ikinci dereceden irrasyonel*** *denir.*

Önerme 2. *Her tamamen periyodik sürekli kesir, indirgenmiş ikinci dereceden bir irrasyoneli temsil eder.*

Periyodu ters çevrilmiş tamamen periyodik sürekli kesir

$$q_n + \frac{1}{q_{n-1}+} \cdots \frac{1}{q_1+} \frac{1}{2q_0+} \frac{1}{q_n+} \cdots$$

$-\frac{1}{\alpha'}$ ifadesini temsil eder, burada $\alpha = \sqrt{N} + q_0$'dır. Şimdi $\alpha' = -\sqrt{N} + q_0$ alalım. O zaman

$$-\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{N} - q_0} = q_1 + \frac{1}{q_2+} \cdots \frac{1}{q_n+} \frac{1}{2q_0+} \cdots$$

olur. Yani $\sqrt{N}$'nin sürekli kesir gösterimi şu olmak zorundadır:

$$q_0, \overline{q_1, q_2, \ldots, q_2, q_1, 2q_0}.$$

Şimdi, **Lagrange Teoremi** olarak bilinen önemli bir teoremi kanıtlayalım.

Teorem 2. *Her ikinci dereceden irrasyonelin, belli bir yerden sonra periyodik olan sürekli kesir gösterimi vardır.*

Kanıt. Şunu kanıtlamak yeterli olacak: Herhangi bir α ikinci dereceden irrasyoneli sürekli kesir formuna çevrildiği zaman, eninde sonunda indirgenmiş ikinci dereceden irrasyonel olan tam bölüm α_n'ye ulaşırız. Bu noktadan sonra sürekli kesir periyodik olacaktır.

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} A_n + A_{n-1}}{\alpha_{n+1} B_n + B_{n-1}}$$

denkleminin geçerli olduğunu biliyoruz. α_n ve α_{n+1} ikinci dereceden irrasyoneller olduğundan,ve A_n, B_n, A_{n-1}, B_{n-1} tam sayı olduğundan, hatta doğal sayılar olduğundan, α ve α' arasında da aynı ilişki olmalıdır. Yani,

$$\alpha'_{n+1} = -\frac{B_{n-1}\alpha' - A_{n-1}}{B_n \alpha' - A_n} = -\frac{B_{n-1}}{B_n}\left(\frac{\alpha' - A_{n-1}/B_{n-1}}{\alpha' - A_n/B_n}\right).$$

$\frac{A_n}{B_n}$ ve $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$'nin limiti α'dır ve parantez içindeki ifadenin limiti 1 dir. Ayrıca B_{n-1} ve B_n sayıları pozitiftir ve dolayısıyla α'_{n+1} negatiftir. Ek olarak $\frac{A_n}{B_n}$ ifadelerinin değeri sırayla α'dan küçük ve α'dan büyüktür. Dolayısıyla parantez içindeki ifade, sırayla 1'den küçük ve 1'den büyüktür. Eğer n'yi, parantez içindeki ifade 1'den küçük olacak şekilde seçersek, ve $B_{n-1} < B_n$ olduğundan, α'_{n+1}'in -1 ve 0 arasında değer aldığını görürüz. n'nin bu değeri için, α'_{n+1} sayısı indirgenmiş ikinci dereceden irrasyonel olur. □

İkinci dereceden irrasyonellerden başka, sürekli kesir gösterimi bir düzen içinde olan çok fazla irrasyonel sayı yok ne yazık ki.

5. Pell denklemi

Sürekli kesirlerden bahsettikten sonra bu konuda önemli bir yere sahip olan bir denklemden kısaca bahsedeceğiz.

N, tam kare olmayan bir doğal sayı olsun. $x^2 - Ny^2 = 1$ formundaki denklemlere ***Pell denklemi*** denir. Pell denkleminin doğal sayılarda her zaman bir çözümü vardır. Aslında sonsuz sayıda doğal sayı çözümü vardır. Bu yazıda öğrendiklerimizi kullanarak Pell denklemine sürekli kesirleri kullanarak bir çözüm vermek istersek, çözüm şöyle olacak: N doğal sayısının karekökünü alalım. Bulduğumuz sayı N tam kare olmadığı için bir irrasyonel sayı olacak. Bu irrasyonel sayıyı sürekli kesir biçiminde yazalım ve yakınsaklarına bakalım. O zaman Pell denkleminin bütün çözümleri bu yakınsakların arasında bulunacaktır.

Kaynakça:

[1] Davenport, H., 1968. The higher arithmetic : an introduction to the theory of numbers. 3rd ed. 77-113 London: Hutchinson.

[2] Hardy, G. H. and Wright E. M., 1960. An Introduction to the Theory of Numbers. 4th ed. 129-153 Oxford University Press, Ely House, London